Tartalomjegyzék

A királynőprobléma numerikus megoldása k=3 –ra!

REKREATÍV KOMBINATORIKAI TANULMÁNY

(Pintér Antal 1973-ban végzett munkája alapján)

ELŐSZÓ

A rekreatív matematikához tartozó sakkelméleti problémák egyik legközismertebb változata a nyolc dáma problémája, vagyis hányféleképpen lehet elhelyezni nyolc királynőt a sakktáblára oly módon, hogy azok ne támadják egymást. A feladat még 1848-ból származik, egy német sakkozó, M.Betzel vetette föl, majd foglalkozott vele dr. F. Nauck és maga Gauss is. A feladatot megoldották ugyan, ami nem is különösebben nehéz, kis igyekezettel a 92 különböző állás mindegyikét bárki megtalálhatja, ellenben a probléma általános formájában, *n*x*n* –es táblára a mai napig is megoldatlan! Különböző korokban különböző rekordokról értesülhetünk, az utóbbi időben évente rendeznek számítógépes versenyeket is ezzel kapcsolatban de tudomásom szerint megoldás ma is csak legfeljebb *n*=26 nagyságú táblára ismeretes.

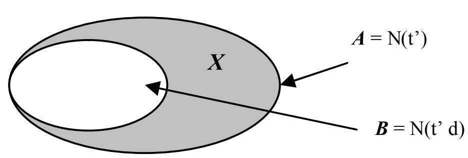
A témával kapcsolatos érdeklődés viszont az össz lehetséges fölállítás megtalálásában még nem merül ki, valójában csak ezzel kezdődik. A végső cél ugyanis az *n*x*n* –es tábla tetszőleges *k*-számú királynő problémájának **egzakt matematika**i kifejezése, ami eddig szintén megoldatlan maradt! Matematikai képlet csak legfeljebb *k*=6 –ra ismeretes, ebben a munkában pedig közölni fogjuk a megoldást és az ahhoz vezető utat *k*=3 –ra!

Ellentétben E.Landau 1896-ban közölt megoldásával, ahol külön képlettel szolgált a páros –és külön a páratlan számú oldalakra, itt részletes bemutatásra kerül sor az általános egyedi képlet levezetése!

1. Az elvi alapok lefektetése

A probléma megoldását arra az elgondolásra alapozzuk hogy a bástyaprobléma megoldásaiból, **N*(t')*** –ből kivonjuk mindazokat az eseteket amikor a királynők *csak diagonálisban* támadják egymást! Az alapvető reláció tehát szimbólikusan

$$\boldsymbol{N(t'd') = N(t') - N(t'd)}$$



$$B, X \subset A \qquad B \cap X = \varnothing \qquad X = A \setminus B \tag{1}$$

Az ***N*(*t'*)** értéke ismert, egyenlő a $C(n,k)$ kombináció és a $V(n,k)$ variáció szorzatával, illetve

$$\boldsymbol{N(t') = \binom{n}{k}^2 k!} \tag{2}$$

Feladatunk itt tehát az ***N*(*t'd*)** értékének meghatározása, amit pedig úgy érünk el, hogy összeszámoljuk mindazokat az eseteket, amikor *bármelyik két királynő* diagonálisban támadja egymást! Az a_1, a_2, a_3 királynőkkel ez a következőképpen lehetséges:

$\sigma = N(a_1\text{-}a_2)$

$\lambda = N(a_1\text{-}a_3)$

$\delta = N(a_2\text{-}a_3)$ vagyis $\boldsymbol{B = N(t'd) = \sigma \cup \lambda \cup \delta}$ (3)

A *tartalmazások és kizárások* elvével összhangban azonban ezek összegéből ki kell vonnunk azokat az eseteket, amelyeket a királynők állásából kifolyólag többször is összeszámoltunk:

✔ Igy háromszol számoltuk össze azokat az állásokat, amikor mindhárom bábu egy diagonálison van. Jelöljük ezt $\boldsymbol{\varphi = N(a_1\text{-}a_2\text{-}a_3)}$ –val. Ezért, ennek kétszeresét nem kell beleszámolnunk, illetve ki kell vonnunk $N(t'd)$ értékéből!

✔ ✔ Figyelembe kell vennünk azokat az eseteket is amikor a bábuk állása olyan, hogy pl. az a_1 bábu támadja a_2 –őt, a_2 pedig a_3 –at, de a_1 nem támadja a_3 –at, mert az ilyen tipusú állásokat kétszer számoltuk össze, aminek tehát egyszeresét szintén nem számoljuk bele $N(t'\,d)$ értékébe. Jelöljük ezek számát $\boldsymbol{\Delta = N(a_1a_2a_3)}$ –val!

✔ ✔ ✔ Vegyük még észre hogy a bábuknak jelölésükre való invarianciájuk miatt az $N(a_1\text{-}a_2)$ ugyanaz mint $N(a_2\text{-}a_3)$, illetve $\boldsymbol{\sigma = \delta}$!

Ekkor a fönti megállapítások alapján és a megfelelő behelyettesítésekkel fölállítható a következő logikai egyenlőség:

$N(t'd)=[2\,N(a_1\text{-}a_2) + N(a_1\text{-}a_3)] - [2\,N(a_1\text{-}a_2\text{-}a_3) + N(a_1a_2a_3)]$, illetve szimbólikusan

$$\boldsymbol{N(t'\,d)=(2\sigma+\lambda)-(2\varphi+\Delta)} \tag{4}$$

Elgondolásunk igazolására most szemléljük meg a következő táblázatban $N(t'd)$ valamint a fönt megadott elemeinek értékét néhány n –re amelyeket az úgynevezett *„backtrack”* módszerrel határoztunk meg:

n	***N(t' d)=***	σ	+λ	+ δ	*-2* φ	-Δ
3	6	4	2	4	-4	0
4	72	44	24	44	-24	-16
5	396	210	120	210	-80	-64
6	1376	680	400	680	-200	-184

(A *„backtrack”* módszer biztos de nem könnyű alkalmazása csupán az utolsó sor kitöltéséhez kb. 6 órai munkát igényel, ha csak a teljes átvizsgálások felét végezzük el, ami itt lehetséges ugyan, mivel a tábla n=6 esetében szimmetrikus!)

Most pedig térjünk át az egyes elemek numerikus meghatározására, amit szintén a *„backtrack”* módszer segítségével végzünk, az általa kapott értékeknek képletbe való általánosítása alapján!

Munkánk során a *Pascal háromszög* alábbi módosított táblázatos formájára támaszkodunk, ahol bármely m –edik sor értéke az első n természetes számsor m-ed rendű összegeiként értelmezhető. Tehát pl. ΣΣΣ(5)=70

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Σn	1	3	6	10	**15**	21	28	36	45	55	…
ΣΣn	1	4	10	20	**35**	56	84	120	165	220	…
ΣΣΣn	**1**	**5**	**15**	**35**	**70**	**126**	**210**	**330**	**495**	**715**	**…**
ΣΣΣΣn	1	6	21	56	**126**	252	462	792	1287	2002	…
…	…	…	…	…	**…**	…	…	…	…	…	…

És itt emeljük ki azt az általános identitást is ami csupán a későbbiekben lesz fontos,

$$\sum_{1}^{m}(n) = \binom{\boldsymbol{n+m}}{\boldsymbol{m+1}}$$

mert segítségével a fönti táblázatból származó bármely összefüggés binomiális formában mutatható ki. Például:

1: $\mathbf{\Sigma\Sigma\Sigma(5)} = \binom{\mathbf{5}+3}{\mathbf{3}+\mathbf{1}} = \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{4}} = \mathbf{70}$

2: $\mathbf{\Sigma\Sigma\Sigma(}\boldsymbol{n\text{-}1}\mathbf{)} = \binom{\boldsymbol{n\text{-}1}+3}{\mathbf{3}+\mathbf{1}} = \binom{\boldsymbol{n+2}}{\mathbf{4}}$

3: $\mathbf{\Sigma\Sigma(}\boldsymbol{n}\mathbf{\text{-}3)]} = \binom{\boldsymbol{n\text{-}3}+2}{\mathbf{2}+\mathbf{1}} = \binom{\boldsymbol{n-1}}{\mathbf{3}}$

A másik két érdekes identitás (melyeknek viszont csak a „A nyitott binomiális sorozat lezárása” című második FÜGGELÉK –ben vesszük hasznát) a Pascal táblázatból ugyan nem adódnak közvetlenül, de a hasonlóképpen képzett alábbi két táblázattal jól illusztrálható:

$\Sigma n^2 = \Sigma n + 2\,\Sigma\Sigma(n\text{-}1)$

$\Sigma n^3 = (\Sigma n)^2$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512
Σn^3	1	9	36	100	225	441	784 …	
$(\Sigma n)^2$	1	9	36	100	225	441	784 …	

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
Σn^2	1	5	14	30	55	91	140 …	
$\Sigma n+2*\Sigma\Sigma(n-1)$	1	5	14	30	55	91	140 …	

Alapsejtésünkhöz tartozik, hogy a *„backtrack”* módszer heurisztikusan kapott értékei mindenkor kifejezhetők a táblázat koeficienseinek valamilyen kombinációjával a sakktábla méreteinek függvényében, s közvetlen célunk azok intuitív elérése!

Induljunk tehát sorjában.

2. Kidolgozás

2.1. $\sigma = N(a_1\text{-}a_2)$ meghatározása

Itt a következő összefüggés állapítható meg

3	2	2Σ(n-2)			
4	4	2Σ(n-3)	3Σ(n-2)		
5	6	2Σ(n-4)	3Σ(n-3)	4Σ(n-2)	
6	8	2Σ(n-5)	3Σ(n-4)	4Σ(n-3)	5Σ(n-2)
…	…	…	…	…	…
n	**2(*n*-2) [(*n*-1)Σ(*n*-2) + (*n*-2)Σ(*n*-3) + (*n*-3)Σ(*n*-4) + ...]**				

Észre kell még venni hogy a nyitott sorozat értékeinek összegeiből kiemelve 2(*n*-2) –őt, azok egyértelműen és közvetlenül kifejezhetők a 2ΣΣΣ(n-2) és a ΣΣΣ(n-3) értékek *összegével* (!), mint ahogy az alábbi táblázatban látható:

	kiemelve 2(n-2)*	= σ =	2ΣΣΣ(n-2) +	ΣΣΣ(n-3)
3	**2**	2	2	0
4	**2 9**	11	10	1
5	**2 9 24**	35	30	5
6	**2 9 24 50**	85	70	15
7	**2 9 24 50 90**	175	140	35

Tehát zárt formában írhatjuk hogy:

$$\boldsymbol{\sigma = 2(n\text{-}2)\ [2\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) + \Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3)]} \quad (5)$$

2.2. $\lambda = N(a_1\text{-}a_3)$ meghatározása

Az első –és harmadik királynő támadásai merőben más struktúrát mutatnak:

					2(n-2) kiemelve
3	2(n-2)x1				1
4	4(n-2)x1	2(n-2)x2			2x1+2
	4(n-2)x1				2x1
5	6(n-2)x1	4(n-2)x2	2(n-2)x3		3x1+2x2+3
	6(n-2)x1	4(n-2)x2			3x1+2x2
	6(n-2)x1				3x1
6	8(n-2)x1	6(n-2)x2	4(n-2)x3	2(n-2)x4	4x1+3x2+2x3+1x4
	8(n-2)x1	6(n-2)x2	4(n-2)x3		4x1+3x2+2x3
	8(n-2)x1	6(n-2)x2			4x1+3x2
	8(n-2)x1				4x1

A 2(*n*-2) kiemelésével viszont itt is eredményhez juthatunk, a megoldást most a ΣΣΣΣ(*n*-2) és a ΣΣΣΣ(*n*-4) értékek *külömbségei* adják!

		λ =	ΣΣΣΣ(n-2)	–ΣΣΣΣ(n-4)
3	**1**	1	1	0
4	**4 2**	6	6	0
5	**10 7 3**	20	21	-1
6	**16 18 12 4**	50	56	-6

$$\boldsymbol{\lambda = 2(n\text{-}2)\ [\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}4)]} \quad (6)$$

2.3. $\varphi = N(a_1\text{-}a_2\text{-}a_3)$ meghatározása

n		
3	2(ΣΣ(1) +2ΣΣ(0)) =	2(1)
4	2(ΣΣ(2) +2ΣΣ(1) + 2ΣΣ(0)) =	2(4+2*1)
5	2(ΣΣ(3) +2ΣΣ(2) + 2ΣΣ(1) +2ΣΣ(0)) =	2(10+2*4+2*1)
6	2(ΣΣ(4) +2ΣΣ(3) + 2ΣΣ(2) +2ΣΣ(1) +ΣΣ(0)) =	2(20+2*10+2*4+2*1)
7	2(ΣΣ(5) +2ΣΣ(4) + 2ΣΣ(3) +2ΣΣ(2) +ΣΣ(1) +ΣΣ(0)) =	2(35+2*20+2*10+2*4+2*1)

n		φ =	2*	[ΣΣ(n-2)	+2ΣΣ(n-3)	+2ΣΣ(n-4)	+2ΣΣ(n-5)	+2ΣΣ(n-6)]
3	**2**	2	2	(1)				
4	**8 4**	12	2	(4	+2 * 1)			
5	**20 16 4**	40	2	(10	+2 * 4	+2 * 1)		
6	**40 40 16 4**	100	2	(20	+2 * 10	+2 * 4	+2 * 1)	
7	**70 80 40 16 4**	210	2	(35	+2 * 20	+2 * 10	+2 * 4	+2 * 1)

$\varphi = 2[\ \Sigma\Sigma(n\text{-}2) + [2\Sigma\Sigma(n\text{-}3) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}4) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}5) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}6) + \ldots\ ]]$

Mivel $[2\Sigma\Sigma(n\text{-}3) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}4) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}5) + \ldots\ ] = 2\Sigma\Sigma\Sigma(\text{n-3})$
ezért írhatjuk hogy

$$\varphi = 2[\ \Sigma\Sigma(\text{n-2}) + 2\Sigma\Sigma\Sigma(\text{n-3})] \qquad (7)$$

2.4. $\Delta = N(a_1a_2a_3)$ meghatározása

A helyzet itt kissé körülményesebb. Ezért szorítkozzunk előbb csak az alapállások összeszámolására és jelöljük azt egyelőre $\Psi(n)$ -nel:

n				$\Psi(n)$
4	1 + 1			2
5	1 + 2 + 2 1 + 1 + 1			8
6	1 + 2 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1		23
7	1 + 2 + 3 + 4 + 4 1 + 2 + 3 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1		51
8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 1 +2 + 3 + 4 + 4 + 4 1 + 2 + 3 + 3 + 3 +3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 +2 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +1	1 + 2 + 3 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1	100

A táblázat olyan szabályosságra mutat amelyben $\Psi(n)$ értékét két jól megkülömböztethető számsorozat értékeinek összege adja, jelöljük pedig ezeket $G(n)$ illetve $F(n)$ –nel.

Oszlop	G(n) + F(n)	G(n) + F(n)	G(n) + F(n)
I	1(n-3) + Σ(n-3)	2(n-5) + Σ(n-5)	1(n-3) + Σ(n-3)
II	2(n-4) + Σ(n-4)	3(n-6) + Σ(n-6)	2(n-4) + Σ(n-4)
III	3(n-5) + Σ(n-5)	4(n-7) + Σ(n-7)	3(n-5) + Σ(n-5)
IV	4(n-6) + Σ(n-6)	5(n-8) + Σ(n-8)	4(n-6) + Σ(n-6)

Innen a $G(n)$ meghatározása:

I oszlopra: 1(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+4(n-6)+ ..... = ΣΣ(n-3)
II oszlopra: 2(n-5)+3(n-6)+4(n-7)+5(n-8)+ ..... = ΣΣ(n-4) -1(n-4)
III oszlopra: 3(n-7)+4(n-8)+5(n-9)+6(n-10)+ ..... = ΣΣ(n-5) -1(n-5)-2(n-6)
IV oszlopra: 4(n-9)+5(n-10)+6(n-11)+7(n-12)+ ..... = ΣΣ(n-6) -1(n-6)-2(n-7)-3(n-8)

A föntiekből $G(n)= \sum_{i=1}^{n} i\, G(n)$

$$\boldsymbol{G(n)= \Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3) -[1\Sigma(n\text{-}4) + 2\Sigma(n\text{-}6) +3\Sigma(n\text{-}8) +4\Sigma(n\text{-}10)+\dots]} \qquad (8)$$

Az $F(n)$ meghatározása az alapvető szabályosságból közvetlen is leolvasható, mivel
Σ(n-3) + Σ(n-4) +Σ(n-5) + ... =ΣΣ(n-3) , illetve
Σ(n-5) + Σ(n-6) +Σ(n-7) + ... =ΣΣ(n-5) , és
Σ(n-7) + Σ(n-8) +Σ(n-9) + ... =ΣΣ(n-7) , stb., ezért

$$\boldsymbol{F(n) = \Sigma\Sigma(n\text{-}3) + \Sigma\Sigma(n\text{-}5) + \Sigma\Sigma(n\text{-}7) + \Sigma\Sigma(n\text{-}9) + \dots} \qquad (9)$$

Tehát most már leírható hogy:

$$\boldsymbol{\Psi(n) =F(n) + G(n)}$$

✔ ✔ ✔ ✔ Minthogy azonban 3 királynő az adott feltételek mellett nem tud egyik tengelyre vagy átlóra sem szimmetrikus lenni, ezért a $\Psi(n)$ különböző alapállásainak mindegyike 8-szor transzformálható olyképpen hogy azok teljesen új megoldást nyújtsanak! Ezért

$$\boldsymbol{\Delta =8\ \Psi(n)} \qquad (10)$$

2.5. A képlet összeállítása

Mivel most már adott a (4) -es pontban felvázolt és kiindulópontul szolgáló
$\boldsymbol{N(t'\,d)=(2\sigma+\lambda) - (2\varphi+\Delta)}$ kifejezés mindegyik eleme, felírható hogy

$$\boldsymbol{N(t'\,d)= \Big(2 * 2(n\text{-}2)\, \big[2\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) + \Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3)\big] + 2(n\text{-}2)\big[\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}4)\big]\Big)}$$
$$\boldsymbol{-\Big[2 * 2\big[\Sigma\Sigma(n\text{-}2) + 2\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3)\big] + 8\ \Psi(n)\Big]} \qquad (11)$$

Figyelembe véve az

$$\sum_{1}^{m}(n) = \binom{n+m}{m+1} \quad \text{általános identitást,} \qquad (12)$$

a fönti (11) eredmény binomiális alakja:

$$\boldsymbol{N(t'\,d)} = \Big(\boldsymbol{2*2(n\text{-}2)}\ \Big[\boldsymbol{2}\ \binom{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{4}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{4}}\Big] + 2(n\text{-}2)\Big[\binom{\boldsymbol{n+2}}{\boldsymbol{5}} - \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{5}}\Big]\Big)$$

$$\boldsymbol{-\Big[2*2\Big[\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4}\Big] + 8\ \Psi(n)\Big]} \qquad (13)$$

A binomiális tagok összevonása és rendezése után pedig azt kapjuk hogy

$$\boldsymbol{N(t'd)} = 2\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}\Big[2n^{\boldsymbol{2}} - 6n + 3\Big] - 8\,\Psi(n) \qquad (14)$$

Mivel az (1) alapvető összefüggés szerint $\boldsymbol{N(t'd') = N(t') - N(t'd)}$ és a (2) szerint pedig $\boldsymbol{N(t')} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}^2 3!$, ezzel végül is összeállt a háromdáma probléma megoldási képlete! Írhatjuk tehát az össz lehetséges kombinációk értékére hogy $\boldsymbol{P_3 = N(t'd')}$, illetve

$$\boldsymbol{P_3} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}^2 3! - 2\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}\Big[2n^{\boldsymbol{2}} - 6n + 3\Big] + 8\,\Psi(n) \text{ , ahol} \qquad (15)$$

$\Psi(n) = F(n) + G(n)$ illetve a (8) és a (9) kifejezések binomiális alakjaival

$$F(n) = \binom{\boldsymbol{n-1}}{3} + \binom{\boldsymbol{n-3}}{3} + \binom{\boldsymbol{n-5}}{3} + \binom{\boldsymbol{n-7}}{3} + \ldots\ldots$$

$$G(n) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{4}} - \Big[1\binom{\boldsymbol{n-3}}{2} + 2\binom{\boldsymbol{n-5}}{2} + 3\binom{\boldsymbol{n-7}}{2} + \ldots..\Big]$$

Az $F(n)$ és $G(n)$ sorozatok összeadásával azt kapjuk hogy:

$$\Psi(n) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{4}} + \Big[1\binom{\boldsymbol{n-2}}{2} + 2\binom{\boldsymbol{n-4}}{2} + 3\binom{\boldsymbol{n-6}}{2} + \ \ldots.\Big] \qquad (16)$$

Adjuk még a (16) sorozat első tagját a (15) képlethez, ekkor azt kapjuk hogy

$$P_3 = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}^{\boldsymbol{2}}\ 3! - 2\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}\Big[2\mathrm{n}^{\boldsymbol{2}} - 7\mathrm{n} + 6\Big] + 8\ Q(n) \quad \text{ahol pedig} \qquad (17)$$

$$Q(n) = 1\binom{\boldsymbol{n-2}}{\boldsymbol{2}} + 2\binom{\boldsymbol{n-4}}{\boldsymbol{2}} + 3\binom{\boldsymbol{n-6}}{\boldsymbol{2}} + \ldots \quad \text{még mindig nyitott sor!} \qquad (18)$$

Most már érdemes a (18) kifejezés lezárásával is foglalkoznunk (amit a második FÜGGELÉK-ben tettünk meg), és így adódik hogy

$$Q(n) = \frac{1}{192}\Big[3(-1)^{\boldsymbol{n}}\ (2\mathrm{n}-1) + 2\mathrm{n}^{\boldsymbol{4}} - 4\mathrm{n}^{\boldsymbol{3}} - 8\mathrm{n}^{\boldsymbol{2}} + 10\mathrm{n} + 3\Big] \qquad (19)$$

Ez utóbbi (19) eredményt a fönti (17) képletbe helyettesítve végül is azt kapjuk hogy

$$\boxed{\boldsymbol{P_3} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}^{\boldsymbol{2}}\ 3! - 2\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}\Big[2\mathrm{n}^{\boldsymbol{2}} - 7\mathrm{n} + 6\Big] + \frac{1}{24}\Big[3(-1)^{\boldsymbol{n}}\ (2\mathrm{n} - 1) + 2\mathrm{n}^{\boldsymbol{4}} - 4\mathrm{n}^{\boldsymbol{3}} - 8\mathrm{n}^{\boldsymbol{2}} + 10\mathrm{n} + 3\Big]} \qquad (20)$$

ami pedig nem más, mint a háromkirálynő probléma végleges és teljes megoldása!

3. Megjegyzések

Végül érdekességként említjük csak meg, hogy a fenti képlet némi átrendezéssel olyan alakra hozható amely nagyon emlékeztet a kétkirálynő megoldási képletéhez, ugyanis:

$$\boldsymbol{P_3} = \frac{1}{24}\left[k(-1)^{kn}(2n-1) + 4n^6 - 40n^5 + 158n^4 - 300n^3 + 264n^2 - 86n + 3\right] \text{ és}$$

$$\boldsymbol{P_2} = \frac{1}{6}\left[k(-1)^{kn} + 3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n - 2\right]$$

Nem folytatjuk tovább a lehetséges analógiákat, minthogy a cél itt a háromkirálynő probléma megoldási képlete volt. A módszer alkalmazása igen munkaigényes, a fenti eredmény eléréséhez háromhavi intenzív munkaráfordítás volt szükséges, ezért az általános feladat megoldását tetszőleges számú királynőre másokra bízom...(*)

Visszatérve az (1) alapvető relációra, képletek segítségével most már pillanatok alatt kitölthetjük illusztrációképpen az alábbi táblázat bármelyik sorát, s így pl. n = 80 esetében a $\boldsymbol{P_3}$ össz lehetséges kombinációinak pontos száma 38,492,656,800.

n	N(t')	-N(t'd)	P3=N(f'd')
3	6	6	0
4	96	72	24
5	600	396	204
6	2,400	1,376	1,024
7	7,350	3,722	3,628
8	18,816	8,496	10,320
9	42,336	17,240	25,096
10	86,400	32,000	54,400
11	163,350	55,470	107,880
12	290,400	91,000	199,400
13	490,776	142,756	348,020
14	794,976	215,712	579,264
15	1,242,150	315,826	926,324
16	1,881,600	450,016	1,431,584
17	2,774,400	626,352	2,148,048
18	3,995,136	854,016	3,141,120
19	5,633,766	1,143,510	4,490,256
20	7,797,600	1,506,600	6,291,000
50	2,304,960,000	182,016,000	2,122,944,000
60	7,026,050,400	463,391,000	6,562,659,400
80	40,501,593,600	2,008,936,800	38,492,656,800

UTÓSZÓ

(*) Az itt kijelentett megjegyzés arra a bonyolult helyzetre utal, hogy 38 évvel ezelőtt az összes szükséges számértéket minden segédeszköz nélkül, csak a *backtrack* módszerrel, gyalogosan, kézi lejegyzéssel és összeszámolással lehetett elérni, amely 3-tól nagyobb $\boldsymbol{k}$ -ra már beláthatatlan idővesztéssel járna! Ellenben ma, gyors kompjuterek segitségével, minden számértéket még sokkal nagyobb számú $\boldsymbol{k}$ -ra is nagyon rövid idő alatt lehetne elérni, s így a bemutatott módszer valójában nagyon is tovább járható, és jónak mutatkozik arra, hogy a végleges generális megoldást $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ –es táblára numerikusan is megoldjuk!

Irodalom:

1. John Riordan: "An Introduction to Combinatorial Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1958
2. Pólya György: „A gondolkodás iskolája", Gondolat Kiadó, Budapest 1971
3. J.J.Gik: "Sakk és matematika", Gondolat, Budapest, 1989
4. Dr. Ioan Tomescu: : "Kombinatorika és alkalmazásai", Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978
5. Borzan, Božićević, Devidé…. : "Razgovori o matematici", Školska knjiga, Zagreb, 1971
6. N.Petrović: "Šahovski problem", Tipografija, Zagreb, 1949