

Sadržaj

Numeričko rešenje problema k=3 kraljica	2
UVOD	2
1. Postavljanje teorijskih osnova	2
2. Proces izrade	5
2.1 Određivanje $\sigma = N(a_1 - a_2)$	5
2.2 Određivanje $\lambda = N(a_1 - a_3)$	5
2.3 Određivanje $\varphi = N(a_1 - a_2 - a_3)$	6
2.4 Određivanje $\Delta = N(a_1 a_2 a_3)$	6
2.5 Sastavljanje formule	7
3. Beleške	9
EPILOG	9
Literatura:	10
/ dalje samo u kompletnoj verziji/	
DODATAK – I	11
Numeričko rešenje problema k=2 kraljice	11
1. Uvod	11
2. Izrada	12
2.1 Određivanje $\sigma = N(a_1 - a_2)$	12
2.2 Sastavljanje formule	13
DODATAK – II	15
Zatvaranje otvorenog binomialnog niza	15
1. Uvod	15
2. Izrada	15

Numeričko rešenje problema k=3 kraljica

REKREATIVNA KOMBINATORIJSKA ANALIZA

(Na osnovu rada Antala Pintera iz 1973. godine)

UVOD

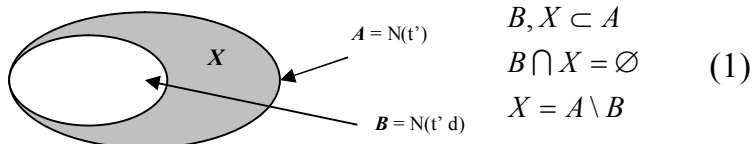
Problem osam dama spada u jedno od najpopularnijih verzija šahovsko -teorijskih problema u okviru rekreativne matematike, tojest pitanje na koliko načina se mogu postaviti osam dama na šahovsku tablu tako da se one međusobno ne napadaju! Zadatak potiče još od davne 1848. godine, postavio ga je jedan nemački šahista, *M. Betzel*, posle se s tim bavio *dr. F. Nauck* a i sam *Gauss*. Zadatak je rešen, mada to i nije posebno teško, svako bi mogao uz manji napor da pronadje svih 92 potpuno različite postavke, međjutim, u svojoj generalizovanoj formi na tabli veličine $n \times n$, problem još ni do danas nije rešen! Možemo se informisati o različitim rekordima koji su postizani u različitim vremenima, poslednjih godina se čak organizuju i godišnja računarska takmičenja u vezi ovoga, ali po mom znanju, najveća tabla na kojoj su dosad pronadjena sva rešenja je veličine $n=26!$ Interesovanje za ovu temu se međutim ne završava sa pronalaženjem svih mogućih postavki, faktički sa ovim tek počinje!.. Glavni cilj je ustvari rešenje problema na tabli veličine $n \times n$ sa k proizvoljno izabranim brojem kraljica u egzaktnom **matematičkom obliku**, koji je dosad isto tako ostao nerešen! Matematička formula postoji samo za najviše $k=6$ kraljica, a u ovom radu je prikazano rešenje i način na koji se do njega dolazi za $k=3$ kraljice!

Za razliku od rešenja *E.Landau* –a iz 1896. gde je posebno data formula za parne i posebno za neparne stranice, ovde je detaljno prikazano izvodjenje **jedne jedinstvene formule!**

1. Postavljanje teorijskih osnova

Rešavanje problema zasnivamo na ideji da se od rešenja problema topova $N(t')$ oduzmu svi oni slučajevi kada se kraljice međusobno napadaju *samo dijagonalno!* Osnovna relacija je stoga simbolično

$$N(t'd) = N(t') - N(t'd)$$



$N(t')$ je poznat, jednak je proizvodu kombinacija $C(n, k)$ i varijacija $V(n, k)$, ili

$$N(t') = \binom{n}{k}^2 k! \quad (2)$$

Dakle, naš zadatak je ovde utvrđivanje vrednosti $N(t'd)$, do koje dolazimo zbrajanjem svih onih slučajeva, gde se *bilo koje dve kraljice* dijagonalno napadaju! Sa a_1, a_2, a_3 kraljica to je moguće na sledeće načine:

$$\sigma = N(a_1 - a_2)$$

$$\lambda = N(a_1 - a_3)$$

$$\delta = N(a_2 - a_3) \quad \text{tojest} \quad B = N(t'd) = \sigma \cup \lambda \cup \delta \quad (3)$$

A ovde ističemo i opšti identitet

$$\sum_1^m \binom{n}{m} = \binom{n+m}{m+1}$$

koji će nam tek u daljnjem radu biti potreban, jer je pomoću njega moguće bilo koji izraz dobijen upotrebom gornje tablice pretvoriti u binomialni oblik. Na primer:

$$1: \quad \Sigma\Sigma\Sigma(5) = \binom{5+3}{3+1} = \binom{8}{4} = 70$$

$$2: \quad \Sigma\Sigma\Sigma(n-1) = \binom{n-1+3}{3+1} = \binom{n+2}{4}$$

$$3: \quad \Sigma\Sigma(n-3) = \binom{n-3+2}{2+1} = \binom{n-1}{3}$$

Druga dva interesantna identiteta (koje će biti od velike koristi tek u drugom DODATKU sa naslovom "Zatvaranje otvorenog binomialnog niza") se doduše ne mogu direktno izvesti iz Pascalove tabele, ali koje se, međutim, dobro ilustruju u niže navedene, slično obrazovane tablice:

$$\Sigma n^2 = \Sigma n + 2 \Sigma\Sigma(n-1)$$

$$\Sigma n^3 = (\Sigma n)^2$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n ³	1	8	27	64	125	216	343	512
Σn ³	1	9	36	100	225	441	784 ...	
(Σn) ²	1	9	36	100	225	441	784 ...	

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n ²	1	4	9	16	25	36	49	64
Σn ²	1	5	14	30	55	91	140 ...	
Σn+2*ΣΣ(n-1)	1	5	14	30	55	91	140 ...	

Naša je osnovna slutnja, da se heuristički dobijene vrednosti po „backtrack” metodi uvek mogu izraziti kombinacijom koeficijenata iz tabele u zavisnosti od veličine šahovske ploče, te nam je neposredni cilj njihovo postizanje na intuitivan način! Krenimo znači, redom.

2. Proces izrade

2.1. Određivanje $\sigma = N(a_1 - a_2)$

Ovde se mogu utvrditi sledeće relacije:

3	2	$2\Sigma(n-2)$			
4	4	$2\Sigma(n-3)$	$3\Sigma(n-2)$		
5	6	$2\Sigma(n-4)$	$3\Sigma(n-3)$	$4\Sigma(n-2)$	
6	8	$2\Sigma(n-5)$	$3\Sigma(n-4)$	$4\Sigma(n-3)$	$5\Sigma(n-2)$
...
n	$2(n-2)$	$[(n-1)\Sigma(n-2) + (n-2)\Sigma(n-3) + (n-3)\Sigma(n-4) + \dots]$			

Takođe je potrebno primetiti da se izvlačenjem pred zagradu $2(n-2)$ iz zbira vrednosti otvorenog niza, one jednoznačno i direktno mogu da se izraze *zbirom* vrednosti $2\Sigma\Sigma\Sigma(n-2)$ i $\Sigma\Sigma\Sigma(n-3)$ (!), kao što se vidi u sledećoj tabeli:

	kiemelve $2(n-2)^*$	=	σ	=	$2\Sigma\Sigma\Sigma(n-2) + \Sigma\Sigma\Sigma(n-3)$
3	2		2		2
4	2 9		11		10
5	2 9 24		35		30
6	2 9 24 50		85		70
7	2 9 24 50 90		175		140

Znači možemo pisati u zatvorenoj formi:

$$\sigma = 2(n-2) [2\Sigma\Sigma\Sigma(n-2) + \Sigma\Sigma\Sigma(n-3)] \quad (5)$$

2.2. Određivanje $\lambda = N(a_1 - a_3)$

Napadanja prve i treće kraljice pokazuju potpuno drugačiju strukturu:

	$2(n-2)$ kiemelve				
3	$2(n-2) \times 1$				1
4	$4(n-2) \times 1$	$2(n-2) \times 2$			$2 \times 1 + 2$
	$4(n-2) \times 1$				2×1
5	$6(n-2) \times 1$	$4(n-2) \times 2$	$2(n-2) \times 3$		$3 \times 1 + 2 \times 2 + 3$
	$6(n-2) \times 1$	$4(n-2) \times 2$			$3 \times 1 + 2 \times 2$
	$6(n-2) \times 1$				3×1
6	$8(n-2) \times 1$	$6(n-2) \times 2$	$4(n-2) \times 3$	$2(n-2) \times 4$	$4 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 4$
	$8(n-2) \times 1$	$6(n-2) \times 2$	$4(n-2) \times 3$		$4 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3$
	$8(n-2) \times 1$	$6(n-2) \times 2$			$4 \times 1 + 3 \times 2$
	$8(n-2) \times 1$				4×1

Međutim, izvlačenje $2(n-2)$ takođe nas dovodi do rezultata, i rešenje nam sada daje *razlika* između $\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-2)$ i $\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-4)$!

	λ	=	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-2)$	-	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-4)$
3	1		1		1
4	4 2		6		6
5	10 7 3		20		21
6	16 18 12 4		50		56

$$\lambda = 2(n-2) [\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-2) - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-4)] \quad (6)$$

2.3. Određivanje $\varphi = N(a_1 - a_2 - a_3)$

n		
3	$2(\Sigma\Sigma(1) + 2\Sigma\Sigma(0))$	$= 2(1)$
4	$2(\Sigma\Sigma(2) + 2\Sigma\Sigma(1) + 2\Sigma\Sigma(0))$	$= 2(4 + 2 \cdot 1)$
5	$2(\Sigma\Sigma(3) + 2\Sigma\Sigma(2) + 2\Sigma\Sigma(1) + 2\Sigma\Sigma(0))$	$= 2(10 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)$
6	$2(\Sigma\Sigma(4) + 2\Sigma\Sigma(3) + 2\Sigma\Sigma(2) + 2\Sigma\Sigma(1) + \Sigma\Sigma(0))$	$= 2(20 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)$
7	$2(\Sigma\Sigma(5) + 2\Sigma\Sigma(4) + 2\Sigma\Sigma(3) + 2\Sigma\Sigma(2) + \Sigma\Sigma(1) + \Sigma\Sigma(0))$	$= 2(35 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)$

n		$\varphi =$	2^*	$[\Sigma\Sigma(n-2)$	$+2\Sigma\Sigma(n-3)$	$+2\Sigma\Sigma(n-4)$	$+2\Sigma\Sigma(n-5)$	$+2\Sigma\Sigma(n-6)]$
3	2	2	2	(1)				
4	8 4	12	2	(4	+2)			
5	20 16 4	40	2	(10	+8	+2)		
6	40 40 16 4	100	2	(20	+20	+8	+2)	
7	70 80 40 16 4	210	2	(35	+40	+20	+8	+2)

$$\varphi = 2[\Sigma\Sigma(n-2) + [2\Sigma\Sigma(n-3) + 2\Sigma\Sigma(n-4) + 2\Sigma\Sigma(n-5) + 2\Sigma\Sigma(n-6) + \dots]]$$

Pošto je

$$[2\Sigma\Sigma(n-3) + 2\Sigma\Sigma(n-4) + 2\Sigma\Sigma(n-5) + \dots] = 2\Sigma\Sigma\Sigma(n-3)$$

zato možemo pisati da je

$$\varphi = 2[\Sigma\Sigma(n-2) + 2\Sigma\Sigma\Sigma(n-3)] \quad (7)$$

2.4. Određivanje $\Delta = N(a_1 a_2 a_3)$

Situacija je ovde malo otežana. Zato se prvo ograničimo samo na zbrajanje osnovnih pozicija i označimo to privremeno sa $\Psi(n)$:

n				$\Psi(n)$
4	1 + 1			2
5	1 + 2 + 2 1 + 1 + 1			8
6	1 + 2 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1		23
7	1 + 2 + 3 + 4 + 4 1 + 2 + 3 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1		51
8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1 + 2 + 3 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1	100

Tabela nam otkriva takvu pravilnost u kojoj je vrednost $\Psi(n)$ izražena zbirom dva jasno razlikovana numerička niza, koje ćemo označiti sa $G(n)$ odnosno $F(n)$.

Oszlop	$G(n) + F(n)$	$G(n) + F(n)$	$G(n) + F(n)$
I	$1(n-3) + \Sigma(n-3)$	$2(n-5) + \Sigma(n-5)$	$1(n-3) + \Sigma(n-3)$
II	$2(n-4) + \Sigma(n-4)$	$3(n-6) + \Sigma(n-6)$	$2(n-4) + \Sigma(n-4)$
III	$3(n-5) + \Sigma(n-5)$	$4(n-7) + \Sigma(n-7)$	$3(n-5) + \Sigma(n-5)$
IV	$4(n-6) + \Sigma(n-6)$	$5(n-8) + \Sigma(n-8)$	$4(n-6) + \Sigma(n-6)$

Iz ovog, određivanje $G(n)$:

$$\begin{aligned}
 \text{I kolona: } & 1(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+4(n-6)+ \dots = \Sigma\Sigma(n-3) \\
 \text{II kolona: } & 2(n-5)+3(n-6)+4(n-7)+5(n-8)+ \dots = \Sigma\Sigma(n-4) -1(n-4) \\
 \text{III kolona: } & 3(n-7)+4(n-8)+5(n-9)+6(n-10)+ \dots = \Sigma\Sigma(n-5) -1(n-5)-2(n-6) \\
 \text{IV kolona: } & 4(n-9)+5(n-10)+6(n-11)+7(n-12)+ \dots = \Sigma\Sigma(n-6) -1(n-6)-2(n-7)-3(n-8)
 \end{aligned}$$

Na osnovu gornjeg, $G(n) = \sum_{i=1}^n G(n)$

$$G(n) = \Sigma\Sigma\Sigma(n-3) - [1\Sigma(n-4) + 2\Sigma(n-6) + 3\Sigma(n-8) + 4\Sigma(n-10) + \dots] \quad (8)$$

Određivanje $F(n)$ je direktno očitljiv iz osnovne pravilnosti, jer je

$$\begin{aligned}
 \Sigma(n-3) + \Sigma(n-4) + \Sigma(n-5) + \dots &= \Sigma\Sigma(n-3), i \\
 \Sigma(n-5) + \Sigma(n-6) + \Sigma(n-7) + \dots &= \Sigma\Sigma(n-5), i \\
 \Sigma(n-7) + \Sigma(n-8) + \Sigma(n-9) + \dots &= \Sigma\Sigma(n-7), \text{ itd. , dakle}
 \end{aligned}$$

$$F(n) = \Sigma\Sigma(n-3) + \Sigma\Sigma(n-5) + \Sigma\Sigma(n-7) + \Sigma\Sigma(n-9) + \dots \quad (9)$$

Sada već možemo pisati da je:

$$\Psi(n) = F(n) + G(n)$$

✓ ✓ ✓ ✓ S obzirom, međutim, da tri kraljice uz date uslove ne mogu biti simetrične ni na jednu osu ili dijagonalu, zato se sve različite osnovne pozicije $\Psi(n)$ –a mogu transformisati na 8 načina (refleksijom i rotacijom) tako da one daju potpuno nova rešenja! Zato je

$$\Delta = 8 \Psi(n) \quad (10)$$

2.5. Sastavljanje formule

Sada su nam znači dati svi elementi izraza $N(t^{\circ} d) = (2\sigma + \lambda) - (2\phi + \Delta)$ zacrtanog u tački (4) koji nam je služio kao polazna tačka , tako da se može napisati

$$\begin{aligned}
 N(t^{\circ} d) = & (2 * 2(n-2) [2\Sigma\Sigma\Sigma(n-2) + \Sigma\Sigma\Sigma(n-3)] + 2(n-2) [\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-2) - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n-4)]) \\
 & - [2 * 2 [\Sigma\Sigma(n-2) + 2\Sigma\Sigma\Sigma(n-3)] + 8 \Psi(n)]
 \end{aligned} \quad (11)$$

Uzimajući u obzir opšti identitet

$$\sum_1^m (n) = \binom{n+m}{m+1}, \quad (12)$$

binomialni oblik gornjeg (11) rezultata je:

$$N(t^d) = (2 \cdot 2(n-2) \left[2 \binom{n+1}{4} + \binom{n}{4} \right] + 2(n-2) \left[\binom{n+2}{5} - \binom{n}{5} \right]) - [2 \cdot 2 \left[\binom{n}{3} + 2 \binom{n}{4} \right] + 8 \Psi(n)] \quad (13)$$

Posle zbrajanja i sredjivanja binomialnih članova, dobijamo da je

$$N(t^d) = 2 \binom{n}{3} [2n^2 - 6n + 3] - 8 \Psi(n) \quad (14)$$

Pošto je prema osnovnoj relaciji (1) $N(t^d) = N(t) - N(t^d)$, a prema (2) je $N(t) = \binom{n}{3} 3!$, time se konačno sastavila formula rešenja problema triju dama! Možemo dakle pisati za vrednost svih mogućih kombinacija da je $P_3 = N(t^d)$, to jest

$$P_3 = \binom{n}{3}^2 3! - 2 \binom{n}{3} [2n^2 - 6n + 3] + 8 \Psi(n), \text{ gde je} \quad (15)$$

$\Psi(n) = F(n) + G(n)$ ili pomoću binomialnih oblika izraza (8) i (9)

$$F(n) = \binom{n-1}{3} + \binom{n-3}{3} + \binom{n-5}{3} + \binom{n-7}{3} + \dots$$

$$G(n) = \binom{n}{4} - \left[1 \binom{n-3}{2} + 2 \binom{n-5}{2} + 3 \binom{n-7}{2} + \dots \right]$$

Zbrajanjem nizova $F(n)$ i $G(n)$ dobijamo:

$$\Psi(n) = \binom{n}{4} + \left[1 \binom{n-2}{2} + 2 \binom{n-4}{2} + 3 \binom{n-6}{2} + \dots \right] \quad (16)$$

Dodajmo još prvi član niza (16) formuli (15), tada dobijamo da je

$$P_3 = \binom{n}{3}^2 3! - 2 \binom{n}{3} [2n^2 - 7n + 6] + 8 Q(n) \text{ gde je} \quad (17)$$

$$Q(n) = 1 \binom{n-2}{2} + 2 \binom{n-4}{2} + 3 \binom{n-6}{2} + \dots \text{ još uvek otvoreni niz!} \quad (18)$$

Sada je već vredno baviti se i zatvaranjem izraza (18) (a koje smo uradili u DODATKU -II), pa tako proizilazi da je

$$Q(n) = \frac{1}{192} [3(-1)^n (2n-1) + 2n^4 - 4n^3 - 8n^2 + 10n + 3] \quad (19)$$

Zamenom ovog rezultata (19) u gornju formulu (17) dobijamo da je

$$P_3 = \binom{n}{3}^2 3! - 2 \binom{n}{3} [2n^2 - 7n + 6] + \frac{1}{24} [3(-1)^n (2n-1) + 2n^4 - 4n^3 - 8n^2 + 10n + 3] \quad (20)$$

što nije ništa drugo, već konačno i kompletno rešenje problema k=3 Kraljica!

3. Beleške

Na kraju da spomenemo kao posebnu interesantnost, da se gornja formula neznatnim sredjivanjem može dovesti u takav oblik koji veoma podseća na formulu rešenja problema dve kraljice, jer:

$$P_3 = \frac{1}{24} [k(-1)^{kn} (2n-1) + 4n^6 - 40n^5 + 158n^4 - 300n^3 + 264n^2 - 86n + 3] \text{ i}$$

$$P_2 = \frac{1}{6} [k(-1)^{kn} + 3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n - 2]$$

Nećemo nastavljati dalje sa mogućim analogijama, jer nam je cilj ovde bila formula rešenja problema triju kraljica. Primena metode je radno vrlo zahtevna, za dobijanje gornjeg rezultata bilo je potrebno tri meseca napornog rada, zato ću zadatak rešenja opšteg problema za proizvoljan broj kraljica prepustiti drugima...(*)

Vrativši se na (1) osnovnu relaciju, pomoću dobijenih formula sada već možemo i za nekoliko sekundi da ispunimo bilo koji red dole prikazane tabele radi ilustracije, tako npr. za $n = 80$ nalazimo da je tačan broj P_3 svih mogućih kombinacija 38,492,656,800.

n	N(t')	-N(t'd)	P ₃ =N(t'd')
3	6	6	0
4	96	72	24
5	600	396	204
6	2,400	1,376	1,024
7	7,350	3,722	3,628
8	18,816	8,496	10,320
9	42,336	17,240	25,096
10	86,400	32,000	54,400
11	163,350	55,470	107,880
12	290,400	91,000	199,400
13	490,776	142,756	348,020
14	794,976	215,712	579,264
15	1,242,150	315,826	926,324
16	1,881,600	450,016	1,431,584
17	2,774,400	626,352	2,148,048
18	3,995,136	854,016	3,141,120
19	5,633,766	1,143,510	4,490,256
20	7,797,600	1,506,600	6,291,000
50	2,304,960,000	182,016,000	2,122,944,000
60	7,026,050,400	463,391,000	6,562,659,400
80	40,501,593,600	2,008,936,800	38,492,656,800

EPILOG

(*) Gore navedena izjava se odnosi na nemilu situaciju od pre 38 godina kada je za dobijanje svih potrebnih brojevanih vrednosti moglo doći samo *backtrack* metodom, bez ikakvih drugih pomagala, ručnim pribelškama i zbrajanjima na pešački način koji bi za broj k veći od 3 zahtevao ogroman vremenski gubitak! Nasuprot tome, danas, koristeći usluge brzih računara, za vrlo kratko vreme bi mogli dobiti sve potrebne numeričke vrednosti čak i za mnogo veći broj k , čime je prikazana metoda veoma sledljiv put, i dobar alat za pronalaženje konačnog numeričkog rešenja za ploču generalizovane veličine nxn !

Literatura:

1. John Riordan: "An Introduction to Combinatorial Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1958
2. Pólya György: „A gondolkodás iskolája”, Gondolat Kiadó, Budapest 1971
3. J.J.Gik: "Sakk és matematika", Gondolat, Budapest, 1989
4. Dr. Ioan Tomescu: : "Kombinatorika és alkalmazásai", Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978
5. Borzan, Božičević, Devidé... : "Razgovori o matematici", Školska knjiga, Zagreb, 1971
6. N.Petrović: "Šahovski problem", Tipografija, Zagreb, 1949