Sadržaj

Numeričko rešenje problema k=3 kraljica

REKREATIVNA KOMBINATORIJSKA ANALIZA

(Na osnovu rada Antala Pintera iz 1973. godine)

UVOD

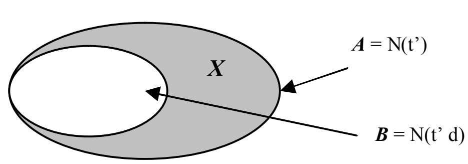
Problem osam dama spada u jedno od najpopularnijih verzija šahovsko -teorijskih problema u okviru rekreativne matematike, tojest pitanje na koliko načina se mogu postaviti osam dama na šahovsku tablu tako da se one medjusobno ne napadaju! Zadatak potiče još od davne 1848. godine, postavio ga je jedan nemački šahista, *M. Betzel*, posle se s tim bavio *dr. F. Nauck* a i sam *Gauss*. Zadatak je rešen, mada to i nije posebno teško, svako bi mogao uz manji napor da pronadje svih 92 potpuno različite postavke, medjutim, u svojoj generalizovanoj formi na tabli veličine nxn, problem još ni do danas nije rešen! Možemo se informisati o različitim rekordima koji su postizani u različitim vremenima, poslednjih godina se čak organizuju i godišnja računarska takmičenja u vezi ovoga, ali po mom znanju, najveća tabla na kojoj su dosad pronadjena sva rešenja je veličine n=26! Interesovanje za ovu temu se medutim ne završava sa pronalaženjem svih mogućih postavki, faktički sa ovim tek počinje!.. Glavni cilj je ustvari rešenje problema na tabli veličine nxn sa k proizvoljno izabranim brojem kraljica u egzaktnom **matematičkom obliku**, koji je dosad isto tako ostao nerešen! Matematička formula postoji samo za najviše k=6 kraljica, a u ovom radu je prikazano rešenje i način na koji se do njega dolazi za k=3 kraljice!

Za razliku od rešenja *E.Landau* –a iz 1896. gde je posebno data formula za parne i posebno za neparne stranice, ovde je detaljno prikazano izvodjenje **jedne jedinstvene formule!**

1. Postavljanje teorijskih osnova

Rešavanje problema zasnivamo na ideji da se od rešenja problema topova **N*(t')*** oduzmu svi oni slučajevi kada se kraljice međusobno napadaju *samo dijagonalno*! Osnovna relacija je stoga simbolično

***N*(*t'd'*) = *N*(*t'*) - *N*(*t'd*)**



$$B, X \subset A \qquad B \cap X = \varnothing \qquad X = A \setminus B \tag{1}$$

***N*(*t'*)** je poznat, jednak je proizvodu kombinacija $C(n,k)$ i varijacija $V(n,k)$, ili

$$\boldsymbol{N(t') = \binom{n}{k}^2 k!} \tag{2}$$

Dakle, naš zadatak je ovde utvrđivanje vrednosti ***N*(*t'd*)** , do koje dolazimo zbrajanjem svih onih slučajeva, gde se *bilo koje dve kraljice* dijagonalno napadaju! Sa a_1, a_2, a_3 kraljica to je moguće na sledeće načine:

$\sigma = N(a_1 - a_2)$
$\lambda = N(a_1 - a_3)$
$\delta = N(a_2 - a_3)$ tojest $\boldsymbol{B = N(t'd) = \sigma \cup \lambda \cup \delta}$ (3)

Međutim, u skladu sa principom *uključivanja i isključivanja,* od ovog zbira moramo oduzeti sve one slučajeve, koje smo zbog pozicija kraljica više puta uračunali:

✔ Tako, tri puta smo zbrojili one pozicije, kada se sve tri figure nalaze na istoj dijagonali. Označimo ovo sa $\boldsymbol{\varphi = N(a_1\text{-}a_2\text{-}a_3)}$. Zato njegovu dvostruku vrednost ne treba uračunati, ili drugim rečima, moramo oduzeti od vrednosti $N(t'd)$!
✔ ✔ Moramo razmotriti i one slučajeve gde su pozicije takve da, npr. figura a_1 napada figuru a_2 , a_2 napada a_3 , ali a_1 ne napada a_3 , jer smo pozicije ovakvog tipa uračunali dva puta, čiju znači jednostruku vrednost takodje nećemo uračunati u vrednost $N(t'\ d)$. Označimo njihov broj sa $\boldsymbol{\Delta = N(a_1a_2a_3)}$!
✔ ✔ ✔ Uočimo još da je zbog invarijantnosti oznaka figura, $N(a_1\text{-}a_2)$ je isto sa $N(a_2\text{-}a_3)$, tako da je $\boldsymbol{\sigma = \delta}$!

Uzevši u obzir gornje konstatacije, a pomoću odgovarajućih zamena možemo postaviti sledeću logičku jednačinu:

$N(t'd)=[2\ N(a_1\text{-}a_2) + N(a_1\text{-}a_3)] - [2\ N(a_1\text{-}a_2\text{-}a_3) + N(a_1a_2a_3)]$, odnosno simbolički

$$\boldsymbol{N(t'\ d)=(2\sigma+\lambda) - (2\varphi+\Delta)} \tag{4}$$

Radi potvrde ispravnosti naše ideje posmatrajmo sad u sledećoj tabeli vrednosti $N(t'd)$ kao i njegovih gore datih komponenti za nekoliko *n*, koje smo empirijski utvrdili sa tzv. *„backtrack”* metodom:

n	***N(t' d)=***	σ	+λ	+ δ	***-2*** φ	-Δ
3	6	4	2	4	-4	0
4	72	44	24	44	-24	-16
5	396	210	120	210	-80	-64
6	1376	680	400	680	-200	-184

(Primena sigurne ali ne baš lake *„backtrack”* metode zahteva cca. 6 sati rada samo za popunjavanje poslednjeg reda, pri čemu se vrši ispitivanje samo polovine svih slučajeva, što je ovde moguće s obzirom da je tabla veličine *n*=6 simetrična!)

Predjimo sada na numeričko odredjivanje pojedinih elemenata, koje takodje vršimo pomoću *„backtrack”* metode, uopštavanjem dobijenih rezultata u pogodne aritmetičke izraze!

Celim tokom našeg rada oslanjaćemo se na dole prikazanu tabelu modifikovanog oblika *Pascal-ovog trougla* , gde se svaka vrednost u bilo kojem redu *m* tumači kao zbir *m*-te klase niza prvih *n* prirodnih brojeva. Tako, npr. ΣΣΣ(5)=70

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Σn	1	3	6	10	**15**	21	28	36	45	55	…
ΣΣn	1	4	10	20	**35**	56	84	120	165	220	…
ΣΣΣn	**1**	**5**	**15**	**35**	**70**	**126**	**210**	**330**	**495**	**715**	**…**
ΣΣΣΣn	1	6	21	56	**126**	252	462	792	1287	2002	…
…	…	…	…	…	**…**	…	…	…	…	…	…

A ovde ističemo i opšti identitet

$$\sum_{1}^{m}(n) = \binom{\boldsymbol{n+m}}{\boldsymbol{m+1}}$$

koji će nam tek u daljnjem radu biti potreban, jer je pomoću njega moguće bilo koji izraz dobijen upotrebom gornje tablice pretvoriti u binomialni oblik. Na primer:

1: $\boldsymbol{\Sigma\Sigma\Sigma(5)} = \binom{\boldsymbol{5}+3}{\boldsymbol{3}+\boldsymbol{1}} = \binom{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{4}} = \mathbf{70}$

2: $\boldsymbol{\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}1)} = \binom{\boldsymbol{n\text{-}1}+3}{\boldsymbol{3}+\boldsymbol{1}} = \binom{\boldsymbol{n+2}}{\boldsymbol{4}}$

3: $\boldsymbol{\Sigma\Sigma(n\text{-}3)]} = \binom{\boldsymbol{n\text{-}3}+2}{\boldsymbol{2}+\boldsymbol{1}} = \binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{3}}$

Druga dva interesantna identiteta (koje će biti od velike koristi tek u drugom DODATKU sa naslovom ”Zatvaranje otvorenog binomialnog niza”) se doduše ne mogu direktno izvesti iz Pascalove tabele, ali koje se, međutim, dobro ilustruju u niže navedene, slično obrazovane tablice:

$\Sigma n^2 = \Sigma n + 2\,\Sigma\Sigma(n\text{-}1)$

$\Sigma n^3 = (\Sigma n)^2$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512
Σn^3	1	9	36	100	225	441	784 …	
$(\Sigma n)^2$	1	9	36	100	225	441	784 …	

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
Σn^2	1	5	14	30	55	91	140 …	
$\Sigma n+2*\Sigma\Sigma(n-1)$	1	5	14	30	55	91	140 …	

Naša je osnovna slutnja, da se heuristički dobijene vrednosti po *„backtrack”* metodi uvek mogu izraziti kombinacijom koeficijenata iz tabele u zavisnosti od veličine šahovske ploče, te nam je neposredni cilj njihovo postizanje na intuitivan način! Krenimo znači, redom.

2. Proces izrade

2.1. **Određivanje** $\sigma = N(a_1\text{-}a_2)$

Ovde se mogu utvrditi sledeće relacije:

3	2	2Σ(n-2)			
4	4	2Σ(n-3)	3Σ(n-2)		
5	6	2Σ(n-4)	3Σ(n-3)	4Σ(n-2)	
6	8	2Σ(n-5)	3Σ(n-4)	4Σ(n-3)	5Σ(n-2)
…	…	…	…	…	…
n	**2(*n*-2)**	**[(*n* -1)Σ(*n* -2) + (*n* -2)Σ(*n* -3) + (*n* -3)Σ(*n* -4) + ...]**			

Takođe je potrebno primetiti da se izvlačenjem pred zagradu 2(n-2) iz zbira vrednosti otvorenog niza, one jednoznačno i direktno mogu da se izraze *zbirom* vrednosti 2ΣΣΣ(n-2) i ΣΣΣ(n-3) (!), kao što se vidi u sledećoj tabeli:

	kiemelve 2(n-2)*	= σ =	2ΣΣΣ(n-2) +	ΣΣΣ(n-3)
3	**2**	2	2	0
4	**2 9**	11	10	1
5	**2 9 24**	35	30	5
6	**2 9 24 50**	85	70	15
7	**2 9 24 50 90**	175	140	35

Znači možemo pisati u zatvorenoj formi:

$$\boldsymbol{\sigma = 2(n\text{-}2)\ [2\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) + \Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3)]} \tag{5}$$

2.2. **Određivanje** $\lambda = N(a_1\text{-}a_3)$

Napadanja prve i treće kraljice pokazuju potpuno drugačiju strukturu:

					2(n-2) kiemelve
3	2(n-2)x1				1
4	4(n-2)x1	2(n-2)x2			2x1+2
	4(n-2)x1				2x1
5	6(n-2)x1	4(n-2)x2	2(n-2)x3		3x1+2x2+3
	6(n-2)x1	4(n-2)x2			3x1+2x2
	6(n-2)x1				3x1
6	8(n-2)x1	6(n-2)x2	4(n-2)x3	2(n-2)x4	4x1+3x2+2x3+1x4
	8(n-2)x1	6(n-2)x2	4(n-2)x3		4x1+3x2+2x3
	8(n-2)x1	6(n-2)x2			4x1+3x2
	8(n-2)x1				4x1

Međutim, izvlačenje 2(n-2) takođe nas dovodi do rezultata, i rešenje nam sada daje *razlika* između ΣΣΣΣ(n-2) i ΣΣΣΣ(n-4) !

		λ =	ΣΣΣΣ(n-2)	−ΣΣΣΣ(n-4)
3	**1**	1	1	0
4	**4 2**	6	6	0
5	**10 7 3**	20	21	-1
6	**16 18 12 4**	50	56	-6

$$\boldsymbol{\lambda = 2(n\text{-}2)\ [\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}4)]} \tag{6}$$

2.3. Određivanje $\varphi = N(a_1\text{-}a_2\text{-}a_3)$

n		
3	2(ΣΣ(1) +2ΣΣ(0)) =	2(1)
4	2(ΣΣ(2) +2ΣΣ(1) + 2ΣΣ(0)) =	2(4+2*1)
5	2(ΣΣ(3) +2ΣΣ(2) + 2ΣΣ(1) +2ΣΣ(0)) =	2(10+2*4+2*1)
6	2(ΣΣ(4) +2ΣΣ(3) + 2ΣΣ(2) +2ΣΣ(1) +ΣΣ(0)) =	2(20+2*10+2*4+2*1)
7	2(ΣΣ(5) +2ΣΣ(4) + 2ΣΣ(3) +2ΣΣ(2) +ΣΣ(1) +ΣΣ(0)) =	2(35+2*20+2*10+2*4+2*1)

n		φ =	2*	[ΣΣ(n-2)	+2ΣΣ(n-3)	+2ΣΣ(n-4)	+2ΣΣ(n-5)	+2ΣΣ(n-6)]
3	**2**	2	2	(1)				
4	**8 4**	12	2	(4	+2)			
5	**20 16 4**	40	2	(10	+8	+2)		
6	**40 40 16 4**	100	2	(20	+20	+8	+2)	
7	**70 80 40 16 4**	210	2	(35	+40	+20	+8	+2)

$\varphi = 2[\ \Sigma\Sigma(n\text{-}2) + [2\Sigma\Sigma(n\text{-}3) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}4) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}5) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}6) + \ldots\ ]]$

Pošto je

$$[2\Sigma\Sigma(n\text{-}3) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}4) + 2\Sigma\Sigma(n\text{-}5) + \ldots\ ] = 2\Sigma\Sigma\Sigma(\mathrm{n}\text{-}3)$$

zato možemo pisati da je

$$\boldsymbol{\varphi = 2[\ \Sigma\Sigma(n\text{-}2) + 2\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3)]} \tag{7}$$

2.4. Određivanje $\Delta = N(a_1a_2a_3)$

Situacija je ovde malo otežana. Zato se prvo ograničimo samo na zbrajanje osnovnih pozicija i označimo to privremeno sa $\Psi(n)$:

n				$\Psi(n)$
4	1 + 1			2
5	1 + 2 + 2 1 + 1 + 1			8
6	1 + 2 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1		23
7	1 + 2 + 3 + 4 + 4 1 + 2 + 3 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1		51
8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 1 +2 + 3 + 4 + 4 + 4 1 + 2 + 3 + 3 + 3 +3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 +2 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +1	1 + 2 + 3 + 3 + 3 1 + 2 + 2 + 2 + 2 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1	100

Tabela nam otkriva takvu pravilnost u kojoj je vrednost $\Psi(n)$ izražena zbirom dva jasno razlikovana numerička niza, koje ćemo označiti sa $G(n)$ odnosno $F(n)$.

Oszlop	G(n) + F(n)	G(n) + F(n)	G(n) + F(n)
I	1(n-3) + Σ(n-3)	2(n-5) + Σ(n-5)	1(n-3) + Σ(n-3)
II	2(n-4) + Σ(n-4)	3(n-6) + Σ(n-6)	2(n-4) + Σ(n-4)
III	3(n-5) + Σ(n-5)	4(n-7) + Σ(n-7)	3(n-5) + Σ(n-5)
IV	4(n-6) + Σ(n-6)	5(n-8) + Σ(n-8)	4(n-6) + Σ(n-6)

Iz ovog, određivanje $G(n)$:

I kolona: 1(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+4(n-6)+ ..... = ΣΣ(n-3)
II kolona: 2(n-5)+3(n-6)+4(n-7)+5(n-8)+ ..... = ΣΣ(n-4) -1(n-4)
III kolona: 3(n-7)+4(n-8)+5(n-9)+6(n-10)+ ..... = ΣΣ(n-5) -1(n-5)-2(n-6)
IV kolona: 4(n-9)+5(n-10)+6(n-11)+7(n-12)+ ..... = ΣΣ(n-6) -1(n-6)-2(n-7)-3(n-8)

Na osnovu gornjeg, $G(n)= \sum_{i=1}^{n} i\, G(n)$

$$\boldsymbol{G(n)= \Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3) \text{ -}[1\Sigma(n\text{-}4) + 2\Sigma(n\text{-}6) +3\Sigma(n\text{-}8) +4\Sigma(n\text{-}10)+\dots]} \qquad (8)$$

Određivanje $F(n)$ je direktno očitljiv iz osnovne pravilnosti, jer je

Σ(n-3) + Σ(n-4) +Σ(n-5) + ... =ΣΣ(n-3) , i
Σ(n-5) + Σ(n-6) +Σ(n-7) + ... =ΣΣ(n-5) , i
Σ(n-7) + Σ(n-8) +Σ(n-9) + ... =ΣΣ(n-7) , itd. , dakle

$$\boldsymbol{F(n) = \Sigma\Sigma(n\text{-}3) + \Sigma\Sigma(n\text{-}5) + \Sigma\Sigma(n\text{-}7) + \Sigma\Sigma(n\text{-}9) + \dots} \qquad (9)$$

Sada već možemo pisati da je:

$\boldsymbol{\Psi(n) =F(n) + G(n)}$

✔ ✔ ✔ ✔ S obzirom, međutim, da tri kraljice uz date uslove ne mogu biti simetrične ni na jednu osu ili dijagonalu, zato se sve različite osnovne pozicije $\Psi(n)$ –a mogu transformisati na 8 načina (refleksijom i rotacijom) tako da one daju potpuno nova rešenja! Zato je

$$\boldsymbol{\Delta =8\ \Psi(n)} \qquad (10)$$

2.5. Sastavljanje formule

Sada su nam znači dati svi elementi izraza $\boldsymbol{N(t'\,d)=(2\sigma+\lambda) - (2\varphi + \Delta)}$ zacrtanog u tački (4) koji nam je služio kao polazna tačka , tako da se može napisati

$$\boldsymbol{N(t'\,d)= \Big(2 * 2(n\text{-}2) \big[2\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) + \Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3)\big] + 2(n\text{-}2)\big[\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}2) - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}4)\big]\Big)}$$
$$\boldsymbol{\text{-}\big[2 * 2\big[\Sigma\Sigma(n\text{-}2) + 2\Sigma\Sigma\Sigma(n\text{-}3)\big] + 8\ \Psi(n)\big]} \qquad (11)$$

Uzimajući u obzir opšti identitet

$$\sum_{1}^{m}(n) = \binom{\boldsymbol{n+m}}{\boldsymbol{m+1}}, \qquad (12)$$

binomialni oblik gornjeg (11) rezultata je:

$$\boldsymbol{N(t'\,d)} = \Big(2*2(n\text{-}2)\,\Big[2\binom{n+1}{4}+\binom{n}{4}\Big]+2(n\text{-}2)\Big[\binom{n+2}{5}-\binom{n}{5}\Big]\Big)$$

$$-\Big[2*2\Big[\binom{n}{3}+2\binom{n}{4}\Big]+8\,\Psi(n)\Big] \qquad (13)$$

Posle zbrajanja i sredjivanja binomialnih članova, dobijamo da je

$$\boldsymbol{N(t'd)} = 2\binom{n}{3}\left[2n^2 - 6n + 3\right] - 8\Psi(n) \qquad (14)$$

Pošto je prema osnovnoj relaciji (1) $\boldsymbol{N(t'd') = N(t') - N(t'd)}$, a prema (2) je $\boldsymbol{N(t')}=\binom{n}{3}^2 3!$, time se konačno sastavila formula rešenja problema triju dama! Možemo dakle pisati za vrednost svih mogućih kombinacija da je $\boldsymbol{P_3 = N(t'd')}$, to jest

$$\boldsymbol{P_3} = \binom{n}{3}^2 3! - 2\binom{n}{3}\left[2n^2 - 6n + 3\right] + 8\Psi(n) \quad \text{, gde je} \qquad (15)$$

$\Psi(n) = F(n) + G(n)$ ili pomoću binomialnih oblika izraza (8) i (9)

$$F(n) = \binom{n-1}{3} + \binom{n-3}{3} + \binom{n-5}{3} + \binom{n-7}{3} + \ldots\ldots$$

$$G(n) = \binom{n}{4} - \left[1\binom{n-3}{2} + 2\binom{n-5}{2} + 3\binom{n-7}{2} + \ldots..\right]$$

Zbrajanjem nizova $F(n)$ i $G(n)$ dobijamo:

$$\Psi(n) = \binom{n}{4} + \left[1\binom{n-2}{2} + 2\binom{n-4}{2} + 3\binom{n-6}{2} + \ \ldots.\right] \qquad (16)$$

Dodajmo još prvi član niza (16) formuli (15) , tada dobijamo da je

$$P_3 = \binom{n}{3}^2\ 3! - 2\binom{n}{3}\left[2\mathrm{n}^2 - 7\mathrm{n} + 6\right] + 8\,Q(n) \quad \text{gde je} \qquad (17)$$

$$Q(n) = 1\binom{n-2}{2} + 2\binom{n-4}{2} + 3\binom{n-6}{2} + \ldots \quad \text{još uvek otvoreni niz!} \qquad (18)$$

Sada je već vredno baviti se i zatvaranjem izraza (18) (a koje smo uradili u DODATKU -II), pa tako proizilazi da je

$$Q(n) = \frac{1}{192}\left[3(-1)^n\ (2\mathrm{n}-1) + 2\mathrm{n}^4 - 4\mathrm{n}^3 - 8\mathrm{n}^2 + 10\mathrm{n} + 3\right] \qquad (19)$$

Zamenom ovog rezultata (19) u gornju formulu (17) dobijamo da je

$$\boxed{\boldsymbol{P_3} = \binom{n}{3}^2\ 3! - 2\binom{n}{3}\left[2\mathrm{n}^2 - 7\mathrm{n} + 6\right] + \frac{1}{24}\left[3(-1)^n\ (2\mathrm{n}-1) + 2\mathrm{n}^4 - 4\mathrm{n}^3 - 8\mathrm{n}^2 + 10\mathrm{n} + 3\right]} \qquad (20)$$

što nije ništa drugo, već konačno i kompletno rešenje problema k=3 Kraljica!

3. Beleške

Na kraju da spomenemo kao posebnu interesantnost, da se gornja formula neznatnim sredjivanjem može dovesti u takav oblik koji veoma podseća na formulu rešenja problema dve kraljice, jer:

$$\boldsymbol{P_3} = \frac{1}{24}\left[k(-1)^{kn}(2n-1)+4n^6-40n^5+158n^4-300n^3+264n^2-86n+3\right] \text{ i}$$

$$\boldsymbol{P_2} = \frac{1}{6}\left[k(-1)^{kn}+3n^4-10n^3+9n^2-2n-2\right]$$

Nećemo nastavljati dalje sa mogućim analogijama, jer nam je cilj ovde bila formula rešenja problema triju kraljica. Primena metode je radno vrlo zahtevna, za dobijanje gornjeg rezultata bilo je potrebno tri meseca napornog rada, zato ću zadatak rešenja opšteg problema za proizvoljan broj kraljica prepustiti drugima...(*)

Vrativši se na (1) osnovnu relaciju, pomoću dobijenih formula sada već možemo i za nekoliko sekundi da ispunimo bilo koji red dole prikazane tabele radi ilustracije, tako npr. za n = 80 nalazimo da je tačan broj $\boldsymbol{P_3}$ svih mogućih kombinacija 38,492,656,800.

n	N(t')	-N(t'd)	P_3=N(f'd')
3	6	6	0
4	96	72	24
5	600	396	204
6	2,400	1,376	1,024
7	7,350	3,722	3,628
8	18,816	8,496	10,320
9	42,336	17,240	25,096
10	86,400	32,000	54,400
11	163,350	55,470	107,880
12	290,400	91,000	199,400
13	490,776	142,756	348,020
14	794,976	215,712	579,264
15	1,242,150	315,826	926,324
16	1,881,600	450,016	1,431,584
17	2,774,400	626,352	2,148,048
18	3,995,136	854,016	3,141,120
19	5,633,766	1,143,510	4,490,256
20	7,797,600	1,506,600	6,291,000
50	2,304,960,000	182,016,000	2,122,944,000
60	7,026,050,400	463,391,000	6,562,659,400
80	40,501,593,600	2,008,936,800	38,492,656,800

EPILOG

(*) Gore navedena izjava se odnosi na nemilu situaciju od pre 38 godina kada je za dobijanje svih potrebnih brojčanih vrednosti moglo doći samo *backtrack* metodom, bez ikakvih drugih pomagala, ručnim pribeleškama i zbrajanjima na pešački način koji bi za broj ***k*** veći od 3 zahtevao ogroman vremenski gubitak! Nasuprot tome, danas, koristeći usluge brzih računara, za vrlo kratko vreme bi mogli dobiti sve potrebne numeričke vrednosti čak i za mnogo veći broj ***k*** , čime je prikazana metoda veoma sledljiv put, i dobar alat za pronalaženje konačnog numeričkog rešenja za ploču generalizovane veličine ***n***x***n*** !

Literatura:

1. John Riordan: "An Introduction to Combinatorial Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1958
2. Pólya György: „A gondolkodás iskolája”, Gondolat Kiadó, Budapest 1971
3. J.J.Gik: "Sakk és matematika", Gondolat, Budapest, 1989
4. Dr. Ioan Tomescu: : "Kombinatorika és alkalmazásai", Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978
5. Borzan, Božićević, Devidé…. : "Razgovori o matematici", Školska knjiga, Zagreb, 1971
6. N.Petrović: "Šahovski problem", Tipografija, Zagreb, 1949

This article was first published on the website http://pinter.netii.net/queens_en.htm, 10.06.2011